МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ

И.В.Целищева, Г.И.Шишкин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

[1]) Решения регулярных краевых задач в составных областях имеют особенности, вызванные наличием разрывов в коэффициентах дифференциальных уравнений, а также их правых частей. В случае сингулярно возмущенных уравнений появляются дополнительные особенности – пограничные и переходные (в окрестности границ раздела подобластей, порождающих составную область) слои [1]. Такое поведение решений сингулярно возмущенных задач в составных областях порождает большие ошибки при использовании численных методов, разработанных для регулярных краевых задач (см, например, [2, 3]). Ошибки стандартных методов могут во много раз превосходить само решение при малых значениях возмущающего параметра ε. Рассмотрение модельных примеров для такого типа задач показывает, что на равномерных сетках ошибка сеточного решения неограниченно растет как $\varepsilon^{-1} N_1^{-1}$ при $\varepsilon \ll N_1^{-1}$, где $N_1 + 1$ – число узлов сетки по пространственной переменной x_1. В связи с отмеченным обстоятельством становится актуальной проблема разработки специальных численных методов, сходящихся ε-равномерно. Привлекательными, в частности, являются численные методы типа Шварца на основе декомпозиции области, допускающие параллельные вычисления.

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии

$$L_k\, u(x,t) \equiv \left\{ \varepsilon^2 \sum_{s=1,2} a_{ks}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial {x_s}^2} - c_k(x,t) - p_k(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \right\} u(x,t) = f_k(x,t),$$
$$(x,t) \in G_k, \tag{1a}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S, \quad k = 1,2. \tag{1b}$$

в составной области $\overline{G}$ с границей $S = \overline{G} \setminus G$, где

$$G = D \times (0,T], \quad D = \Big\{ x: \ -d_0 < x_1 < d^0, \ \ x_2 \in R \Big\}, \quad d_0, \ d^0 > 0,$$

множество $\overline{D}$ образовано двумя вертикальными подобластями-полосами $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$: $D_1 = D \bigcap \{x_1 < 0\}$, $D_2 = D \bigcap \{x_1 > 0\}$. На множестве $S^* = \Gamma^* \times (0,T]$, где $\Gamma^* = \{x_1 = 0\} \times R$ – границе раздела подобластей – действует сосредоточенный источник

$$[\, u(x,t)\,] = 0, \quad l u(x,t) \equiv \varepsilon \Big[a_1(x,t) \frac{\partial}{\partial x_1} u(x,t) \Big] = -q(x,t), \quad (x,t) \in S^*. \tag{1c}$$

В (1) $G_k = D_k \times (0,T]$, $k = 1,2$, функции $a_{ks}(x,t)$, $c_k(x,t)$, $p_k(x,t)$, $f_k(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}_k$, а функции $\varphi(x,t)$ и $q(x,t)$ – на $\underline{S_j}$, $j = 0,1,2$ и S^* соответственно, $\varphi \in C(S)$, где $S = S^L \bigcup S_0$, $S^L = S_1 \bigcup S_2$, $S_0 = \overline{S}_0$ – нижнее основание, а S_1, S_2 – левая и правая боковые границы множества G. Параметр ε

[1]) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00362).

принимает произвольные значения из полуинтервала (0,1]. Коэффициенты уравнения и данные задачи удовлетворяют условиям ограниченности [2)]

$$0 < a_0 \le a_{ks}(x,t) \le a^0, \;\; 0 \le c_k(x,t) \le c^0, \;\; 0 < p_0 \le p_k(x,t) \le p^0, \;\; |\, f_k(x,t)\,| \le M,$$
$$(x,t) \in \overline{G}_k, \;\; s,k = 1,2; \quad |\,\varphi(x,t)\,| \le M, \;\; (x,t) \in S; \quad |\,q(x,t)\,| \le M, \;\; (x,t) \in S^*.$$

Символ $[\,v\,]$ обозначает скачок функции v при переходе через S^* из G_1 в G_2 :

$$[\,u(x,t)\,] \;=\; \lim_{\substack{x^+ \to x \\ (x^+,\,t) \in G_2}} u(x^+,t) \;-\; \lim_{\substack{x^- \to x \\ (x^-,\,t) \in G_1}} u(x^-,t), \quad (x,t) \in S^*;$$

$$\left[a_1(x,t)\, \frac{\partial}{\partial x_1} u(x,t) \right] \;=\; \lim_{\substack{x^+ \to x \\ (x^+,\,t) \in G_2}} a_{21}(x^+,t)\, \frac{\partial}{\partial x_1} u(x^+,t) \;-$$
$$-\; \lim_{\substack{x^- \to x \\ (x^-,\,t) \in G_1}} a_{11}(x^-,t)\, \frac{\partial}{\partial x_1} u(x^-,t), \quad (x,t) \in S^*.$$

При стремлении параметра ε к нулю возникают пограничные и переходный параболические слои в окрестности множеств S^L и S^* соответственно.

Заметим, что краевые задачи такого типа возникают при численном моделировании нестационарных процессов тепло-массопереноса в композитных материалах в случае малости коэффициентов теплопроводности/диффузии.

Для задачи (1) с использованием кусочно-равномерных сеток, *априорно* сгущающихся в пограничных и переходном слоях [1], строится монотонная разностная схема, сходящаяся ε-равномерно на всей области $\overline{G}$ с порядком близким к первому. Применяя интегро–интерполяционный метод [2], можно построить схему с улучшенной аппроксимацией условия сопряжения (1c), для которой ε-равномерный порядок скорости сходимости по пространственным переменным близок к двум. На основе этих (базовых) схем строятся разностные схемы метода декомпозиции области (на неперекрывающихся подобластях) в том случае, когда подобласти декомпозиции являются подобластями, порождающими составную область. В этом случае исходная область естественным образом разделяется на две подобласти с гладкими коэффициентами и свободным членом. Исследуются необходимые и достаточные условия монотонности, а также условия, при которых схемы декомпозиции сходятся ε-равномерно. Отметим, что при построении схем декомпозиции с *неперекрывающимися* подобластями G_1 и G_2 задача (1) предварительно "аппроксимировалась" краевой задачей с искусственной сосредоточенной теплоемкостью, введенной в условие сопряжения на интерфейсной границе S^*.

В случае сингулярно возмущенного эллиптического уравнения на составной области (состоящей из n-мерных слоев) ε-равномерно сходящиеся схемы рассматривались в [1, Глава 1, §1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

[2] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

[3] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

[2)] Здесь M – различные, достаточно большие положительные постоянные, не зависящие от ε.