СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Г.И. Шишкин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

[1] Решения краевых задач для уравнений с частными производными, старшие производные которых (либо некоторые из них) содержат параметр ε, принимающий сколь угодно малые значения, обладают ограниченной гладкостью решений. Для таких задач точность приближенных решений традиционных численных методов (см., например, [1]) зависит от величины параметра и ухудшается при малых значениях ε (описание проблем, возникающих в случае эллиптических и параболических уравнений см., например, в [2] – [4]). В связи с этим возникает проблема разработки схем, сходящихся равномерно относительно параметра ε (или, короче, ε-равномерно). В отличие от сингулярно возмущенных краевых задач для эллиптических и параболических уравнений, для которых достаточно хорошо разработаны методы построения и исследования ε-равномерно сходящихся разностных схем [3], [4], в случае гиперболических уравнений с малым параметром такие схемы в литературе практически не рассматривались.

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного волнового уравнения

$$L\ u(x,t) \equiv \left\{\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in G, \tag{1}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t)\in S, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \varphi_0(x,t), \quad (x,t)\in S_0.$$

Здесь $G = D\times(0,T]$, $D=(0,d)$, $S=\overline{G}\setminus G$, $S=S_0\cup S_L$, где S_0 и S_L – нижнее основание и боковая граница множества G, $S_L=\overline{S}_L$. Данные задачи (1) являются достаточно гладкими, причем $b(x,t)\ge b_0>0$, $(x,t)\in\overline{G}$. Возмущающий параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. На множестве $\overline{S}_0\cap S_L$ выполнены условия согласования, обеспечивающие достаточную гладкость решения задачи (1) при каждом фиксированном значении ε. Заметим, что при условии $-b^2(x,t)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) = f(x,t)$, $(x,t)\in S_L$, в главном члене асимптотического разложения (по параметру ε) решения задачи (1) отсутствует сингулярная часть; решение, по существу, является регулярным.

При стремлении параметра ε к нулю в окрестности боковой границы S_L появляются гиперболические пограничные слои – пограничные слои, описываемые уравнениями гиперболического типа. Отметим, что для задач с пограничными слоями нормы в L_p $(p\ge 1)$, а также энергетические нормы, порождаемые сингулярно возмущенными уравнениями, не являются адекватными. В этих нормах пограничный слой (конечный в L_∞-норме) стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00362).

Заметим, что задачи такого типа возникают в механике сплошных сред при исследовании волновых процессов в том случае, когда скорость распространения возмущений мала по сравнению с размерами среды.

Показано, что классические разностные схемы, построенные, например, аппроксимацией производных дифференциального уравнения разностными производными на произвольных, в частности, равномерных сетках, сходятся (с ростом числа узлов сетки по x и t) при фиксированных значениях параметра ε, однако не сходятся ε-равномерно.

В случае сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений для построения ε-равномерно сходящихся схем хорошо разработаны подходы на основе: (а) методов подгонки и (б) методов специальным образом сгущающихся сеток (описание этих методов см., например, в [2] – [4]). Заметим, что методы подгонки являются привлекательными, так как позволяют использовать простейшие, а именно, равномерные сетки.

Показано, что в случае начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного волнового уравнения методы подгонки не позволяют строить ε-равномерно сходящиеся схемы в естественных классах разностных схем. Таким образом, использование подхода (б) - специальных сгущающихся сеток – является необходимым для построения ε-равномерно сходящихся схем в случае задачи (1).

При построении схем на основе подхода (б) задача (1) приводится к эквивалентной системе гиперболических уравнений первого порядка. Для этой системы с учетом априорных оценок решения и производных строится кусочно-равномерная сетка (сгущающаяся в окрестности пограничных слоев), на которой классические разностные аппроксимации сходятся ε-равномерно. Для построенных схем (явных и неявных) справедлив принцип максимума [1]. Обоснование ε-равномерной сходимости схем проводится с использованием техники мажорантных функций.

"Сворачивая" специальную разностную схему для гиперболической системы, получаем разностную схему для задачи (1), сходящуюся ε-равномерно. Скорость сходимости таких схем (в норме L_∞) оценивается величиной $\mathcal{O}\left(N^{-1} + N_0^{-1}\right)$, где $N+1$ и N_0+1 – число узлов прямоугольной сетки по пространственной и временной переменным.

Приведенная техника применима и в случае задач на неограниченных областях (на полуосях $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ или же на всей оси x), а также для уравнений, содержащих производные первого порядка по x и t в том случае, когда коэффициенты при этих производных не слишком велики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

[2] *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

[3] *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

[4] *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapore: World Scientific, 1996.