МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

И.В. Целищева, Г.И. Шишкин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

[1] Моделирование и исследование нестационарных процессов тепло-массопереноса в случае малости коэффициента диффузии (теплопроводности) приводит к решению краевых задач для сингулярно возмущенных параболических уравнений – уравнений с малым параметром ε^2 при старших производных. Производные решений таких задач вблизи границы неограниченно возрастают при стремлении возмущающего параметра ε к нулю. Наличие малого параметра и порождаемых им пограничных слоев вызывает хорошо известные трудности при численном решении краевой задачи традиционными методами [1] – [3]. Например, погрешность приближенного решения при использовании классических разностных аппроксимаций на равномерных сетках зависит от параметра ε и может быть соизмеримой с решением краевой задачи при малых значениях ε. Эти трудности порождают проблему построения численных методов, сходящихся ε-равномерно (с точностью, не зависящей от возмущающего параметра ε).

В области разработки ε-равномерных численных методов для сингулярно возмущенных параболических и эллиптических уравнений сложились два основных подхода: (а) основанный на методах подгонки [1, 3], (б) использующий сетки, сгущающиеся в окрестности пограничных (и переходных) слоев [2, 3]. В случае сгущающихся сеток шаг сетки в окрестности пограничного слоя резко изменяется, что может вызывать затруднения при численной реализации схем. Поэтому возникает интерес к методам, использующим равномерные сетки. В этом смысле методы подгонки являются привлекательными, поскольку позволяют использовать простейшие равномерные сетки. Однако, для задач с параболическими пограничными слоями методы подгонки оказываются непригодными для построения ε-равномерно сходящихся схем (см., например, [3, 4]). В связи с этим возникает проблема построения ε-равномерных численных методов на равномерных сетках с использованием идеи декомпозиции как области, так и самого решения.

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенных параболических уравнений реакции-диффузии

$$\left\{\varepsilon^2 \sum_{s=1,2} a_s(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - c(x,t) - p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\right\} u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in G,$$

где $G = D\times(0,T]$, $D = \{x : 0 < x_s < d_s,\ s = 1,2\}$, коэффициенты уравнения и правая часть являются достаточно гладкими, более того, $0 < a_0 \le a_s(x,t) \le a^0$, $0 < p_0 \le p(x,t) \le p^0$, $0 \le c(x,t) \le c^0$, $(x,t)\in \overline{G}$. Возмущающий параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. При $\varepsilon\to 0$ в окрестности боковой границы множества G появляются одномерные и двумерные (угловые) параболические пограничные слои. Предполагаем, что на множестве $S^\star$, образованном

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00362).

пересечением сторон G, выполненны условия согласования необходимого порядка, обеспечивающие достаточную гладкость решения при каждом фиксированном значении ε.

Для рассматриваемой краевой задачи строятся ε-равномерно сходящиеся разностные схемы. Использование техники декомпозиции области и решения позволяет привести исходную задачу к "эквивалентной" системе краевых задач для регулярной и сингулярной компонент решения. Решение задачи может быть представлено в виде

$$u(x,t) = U(x,t) + \sum_{j=1,\dots,4} V_{(j)}(x,t) + \sum_{\substack{i=1,\dots,4,\\ j=i+1}} V_{(ij)}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G},$$

где $U(x,t)$ – гладкая (регулярная) часть решения, $V_{(j)}(x,t)$ – одномерные параболические пограничные слои, $V_{(ij)}(x,t)$ – угловые параболические слои. Заметим, что сингулярные части решения существенно отличны от нуля только в окрестности границы и быстро убывают (вместе с производными) при удалении от нее. Это позволяет рассматривать погранслойные функции лишь в ближайшей окрестности границы. Краевые задачи для аддитивных компонент решения аппроксимируются неявными разностными схемами на равномерных сетках [5]. При подходящем выборе параметров схем и подобластей определения погранслойных функций построенное приближенное решение сходится к точному ε-равномерно на всей области $\overline{G}$. Скорость ε-равномерной сходимости оценивается (в норме L_∞) величиной $\mathcal{O}\left(N^{-2}\ln^2 N + N_0^{-1}\right)$, где $N = \min\,[\,N_1, N_2\,]$, N_s+1, $s=1,2$ и N_0+1 – число узлов сетки, соответственно, по пространственной переменной x_s и по временной переменной t. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретическую оценку скорости сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

[2] *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

[3] *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Singapore: World Scientific, 1996.

[4] *Shishkin G.I.* On finite difference fitted schemes for singularly perturbed boundary value problems with a parabolic boundary layer // J. Numer. Analysis & Appls. 1997. V. 208. P. 181-204.

[5] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.